পরিশিষ্ট ক

প্রাণী, সবজি, নাকি মন্ত্রী?

ধরুন a ও b সমান ১। তাহলে a ও b সমান।

অতএব, আমরা লিখতে পারি

b2 = ab (সমীকরণ ... ১)

আবার a তো নিজের সমান। অতএব, লিখতেই পারি

a2 = a2 (সমীকরণ ... ২)

২ নং সমীকরণ থেকে ১ নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই

a2 – b2 = a2 – ab (সমীকরণ ... ৩)

সমীকরণের উভয়পক্ষকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি।

a2 – b2 = (a + b) (a - b)। আবার a2 – ab = a (a – b)। (এখন পর্যন্ত সন্দেহজনক কিছুই করিনি। সবকিছুই গাণিতিকভাবে নির্ভুল। পরীক্ষা করে দেখতে চাইলে সংখ্যা বসিয়ে দেখুন।) তাহলে ৩ নং সমীকরণ থেকে পাচ্ছি

(a + b) (a – b) = a (a – b) (সমীকরণ ... ৪)

এখনও সব ঠিক আছে। এবার উভয় পক্ষকে (a – b) দিয়ে ভাগ করি।

a + b = a (সমীকরণ ... ৫)

দুই পক্ষ থেকে a বিয়োগ করি।

b = 0 (সমীকরণ ... ৬)

তবে শুরুতেই b সমান ১ ধরেছিলাম। তার মানে

১ = ০ (সমীকরণ ... ৭)

এটা খুব গুরুত্বপূর্ণ এক ফলাফল। আরও সামনে যাওয়া যাক। আমরা জানি, হুসেইন মুহাম্মদ এরশাদের একটি মাথা ছিল। কিন্তু ৭ নং সমীকরণ বলছে, এক আর শূন্য সমান। তার মানে এরশাদের কোনো মাথা নেই। আবার এরশাদের পাঞ্জাবি নেই। তার মানে একটি পাঞ্জাবি আছে। ৭ নং সমীকরণের দুই পক্ষকে ২ দিয়ে গুণ করি।

২ = ০ (সমীকরণ ... ৮)

এরশাদের দুটি পা ছিল। তার মানে তার কোনো পা ছিল না। দুটি বাহু ছিল। মানে একটিও ছিল না। এবার ৭ নং সমীকরণকে এরশাদের কোমরের সাইজ দিয়ে গুণ করি।

এরশাদের কোমরের সাইজ = ০ (সমীকরণ ... ৯)

মানে তার কোমরই ছিল না।

এবার আসুন তার গায়ের রং দেখি। তার গা থেকে আসা একটি আলোকরশ্মি নিন। একটি ফোটন কণা নিন। ৭ নং সমীকরণকে তরঙ্গদৈর্ঘ্য দিয়ে গুণ করুন।

এরশাদের ফোটনের তরঙ্গদৈর্ঘ্য = ০ (সমীকরণ ... ১০)

তবে ৭ নং সমীকরণকে ৬৪০ ন্যানোমিটার দিয়ে গুণ করলে পাই

৬৪০ = ০ (সমীকরণ ... ১১)

১০ ও ১১ সমীকরণ মিলিয়ে পাই

এরশাদের ফোটনের তরঙ্গদৈর্ঘ্য = ৬৪০ ন্যানোমিটার

এর মানে এরশাদের গা থেকে আসা ফোটনের রং কমলা (যার তরঙ্গদৈর্ঘ্য ৬৪০ ন্যানোমিটার)। তারমানে এরশাদের গায়ের রং কমলা।

সারকথা হলো, আমরা গাণিতিকভাবে প্রমাণ করলাম, এরশাদের কোনো বাহু বা পা নেই। এরশাদের কোনো মাথা নেই। তবে একটি পাঞ্জাবি আছে। নেই কোনো কোমর। আর গায়ের রং হলো কমলা। এরশাদ অবশ্যই একটি গাজর। (এটা প্রমাণ করার সহজ উপায় আছে। ৭ নং সমীকরণের দুই পাশে ১ যোগ করলে পাব

২ = ১

এরশাদ আর গাজর দুটি আলাদা জিনিস। অতএব, তারা একই জিনিস।)

এ প্রমাণে অসুবিধা কোথায়? ভুল হইছে একটিমাত্র জায়গায়। ৪ নং সমীকরণ থেকে ৫ নং সমীকরণে যাওয়ার সময় এ ভুলটা হয়েছে। আমরা ভাগ দিয়েছিলাম (a – b) দিয়ে। কিন্তু ভাল করে খেয়াল করুন। a এবং b দুটোরই মান ১। অতএব a – a = 1 – 1 = 0। আমরা শূন্য দিয়ে ভাগ করেছি। আর পেয়েছি হাস্যকর সমীকরণ ১ = ০। এখান থেকে আমরা যা ইচ্ছা তাই প্রমাণ করতে পারব। হোক তা সত্য বা মিথ্যা। গণিতের পুরো কাঠামো ধ্বসে পড়েছে আমাদের চোখের সামনে।

ভুলভাবে ব্যবহার করলে শূন্য যুক্তিকে ধ্বংস করে দিতে পারে।

পরিশিষ্ট খ

সোনালি অনুপাত

একটি রেখাকে দুই ভাগ করুন। কাজটা করুন একটি নিয়ম মেনে। ভাগ করার পরে ছোট ও বড় অংশের অনুপাত বড় ও অংশ ও পুরো অংশের অনুপাতের সমান হতে হেব।

হিসাব সহজ করতে মনে করুন, ছোট অংশ ১ ফুট লম্বা। আর বড় অংশকে ধরুন x ফুট। তাহলে পুরো রেখার দৈর্ঘ্য (x + 1) ফুট।

বীজগণিত খাটিয়ে দেখা যাবে ছোট ও বড় অংশের অনুপাত 1/x।

আর বড় অংশ ও পুরো রেখার অনুপাত x / (x + 1)।

আমরা জানি, ছোট ও বড় অংশের অনুপাত বড় ও অংশ ও পুরো অংশের অনুপাতের সমান। অতএব

x/(x +1) = 1/x

আমরা এখান থেকে x-এর মান বের করব। এটাই সোনালি অনুপাত (golden ratio)। উভয়পক্ষকে x দিয়ে গুণ করে পাই

x2 / (x + 1) = 1

এবার গুণ দেব (x + 1) দিয়ে। তাহলে পাব

x2 = x + 1

উভয় পক্ষ থেকে (x + 1) বিয়োগ দিলে

x2 - x - 1 = 0

এবার আমরা দ্বিঘাত সমীকরণটা সমাধান করতে পারি। পাব দুটি সমাধান। (1+√5)/2 এবং (1 - √5)/2। এ দুটির শুধু প্রথমটিই ধনাত্মক। যার মান ১.৬১৮। গ্রিকদের কাছে শুধু ধনাত্মক সংখ্যাকেই অর্থপুর্ণ মনে হত। অতএব সোনালী অনুপাতের আসন্ন মান ১.৬১৮।

পরিশিষ্ট গ

অন্তরকের আধুনিক সংজ্ঞা

বর্তমানে অন্তরক খুব মজবুত ভিত্তির ওপর দাঁড়িয়ে আছে। কারণ এর সংজ্ঞা দেওয়া হয় লিমিটের মাধ্যমে। একটি ফাংশন f(x) এর অন্তরকের (যাকে f’(x) দ্বারা প্রকাশ করা হয়) সংজ্ঞা হলো

f’(x) = limε→0 {f(x+ε) – f(x)}/ε

এর মাধ্যমে আমরা কীভাবে নিউটনের কূটকৌশল থেকে মুক্তি পাই তা বুঝতে হলে নিউটনের ফ্লুক্সোনের উদাহরণটা দেখা যাক। সেখানে ছিল f(x) = x2 + x +1। তার অন্তরক হবে

f’(x) = imε→0 {(x + ε)2 + x + ε + 1 – (x2 + x + 1)}/ ε

গুণ করে পাব

f’(x) = imε→0 (x2 + 2εx + ε2 + x + ε + 1– x2 - x - 1)/ ε

এখন x2, x ও 1 কাটাকাটি চলে যায়। বাকি থাকে

f’(x) = imε→0 (2εx + ε + ε2)/ε

লব ও হরকে ε দিয়ে ভাগ করে পাই (মনে রাখতে হবে ε সবসময় অশূন্য। আমরা এখনও লিমিট বসাইনি)

f’(x) = imε→0 (2x + 1 + ε) এবার আমরা লিমিট নেব। ε-কে শূন্যের কাছে যেতে দেব। তাহলে পাব

f’(x) = 2x + 1 + 0 = 2x + 1

এটাই আমাদের কাঙ্খিত ফলাফল। চিন্তার সামান্য পরিবর্তন। কিন্তু এতেই ঘটে গেল কত বড় ব্যবধান!

পরিশিষ্ট ঘ

মূলদ সংখ্যার গণনায় ক্যান্টর

আমরা এখন দেখব, মূলদ সংখ্যা আর স্বাভাবিক সংখ্যাদের আকার সমান। ক্যান্টর এটা প্রমাণ করতে একটি অভিনব আসনবিন্যাস প্রস্তাব করেন।

আপনাদের হয়তো মনে আছে, মূলদ সংখ্যাদেরকে a/b ভগাংশ আকারে লেখা যায়, যেখানে a ও b পূর্ণসংখ্যা (b অবশ্যই অশূন্য)। ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাগুলো দিয়ে শুরু করা যাক।

সংখ্যার একটি গ্রিড কল্পনা করুন। যেখানে দুটি সংখ্যারেখা একে অপরকে শূন্যবিন্দুতে ছেদ করে। ব্যাপারটা কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার মতোই। শূন্যকে মূলবিন্দুতে বসাই। বাকি বিন্দুগুলোয় বসাই মূলদ সংখ্যাদের। যাদেরকে আমরা x/y দ্বারা প্রকাশ করব। এখানে x হলো বিন্দুর X অক্ষের স্থানাঙ্ক আর y হলো Y অক্ষের স্থানাঙ্ক। সংখ্যারেখা চলে গেছে অসীম পর্যন্ত। ফলে x ও y-এর প্রতিটি সম্ভাব্য মান গ্রিডের মধ্যে একটি জায়গা পাবে (চিত্র ৫৮)।

এবার ধনাত্মক মূলদ সংখ্যাদের জন্য আসনবিন্যাস বানাই। প্রথম সিটটি গ্রিডের ০ (মূলবিন্দু) দিয়ে শুরু করি (যেখানে অক্ষ দুটি ছেদ করেছে)। পরে পাব ১/১। এটা দ্বিতীয় আসন। এবার যাই ১/২ অবস্থানে (তিরচিহ্ন খেয়াল করুন)। আসন নং ৩। এবার ২/১, যা আসলে ২-ই। এটা হল ৪র্থ আসন। এবার আছে ৩/১। আসন নং ৫। এবার তিরচিহ্ন ধরে যেতে যেতে সবাইকে একটি করে আসন দেব। এভাবে আসনবিন্যাস তৈরি হয়ে যাবে।

চিত্র ৫৮: স্বাভাবিক সংখ্যার গণনা

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| আসন | ১ | ২ | ৩ | ৪ | ৫ | ৬ | ৭ | ৮ | ৯ | ... |
| মূলদ সংখ্যা | ০ | ১ | ১/২ | ২ | ৩ | ১ | ১/৩ | ১/৪ | ২/৩ | ... |

শেষ পর্যন্ত সব সংখ্যাই আসন পাচ্ছে। কোনো কোনো সংখ্যা আবার ২টি আসন পাচ্ছে। একই আসন কোনোসংখ্যাকে দ্বিতীয়াবার না দিলেই এর সমাধানও হয়ে গেল। পরের কাজটা হলো তালিকাকে দ্বিগুণ করা। যাতে ধনাত্মক মূলদের জায়গায় থাকবে ঋণাত্মক সংখ্যারা। তাহলে আমরা আরেকটি আসনবিন্যাস।

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| আসন | ১ | ২ | ৩ | ৪ | ৫ | ৬ | ৭ | ৮ | ৯ | ... |
| মূলদ সংখ্যা | ০ | ১ | -১ | ১/২ | -১/২ | ২ | -২ | ৩ | -৩ | ... |

এখন ধনাত্মক, ঋণাত্মক ও শূন্য—সব মূলদ সংখ্যাই আসন পেয়ে গেল। আসনবিহীন কেউ নেই। কোনো আসন ফাঁকাও নেই। তার মানে মূলদসংখ্যা আর গণনাসংখ্যাদের আকার সমান।